

Curs 1 - Definiția spațiilor vectoriale (liniare). Exemple. Reguli de calcul într-un spațiu vectorial.

Oana Constantinescu, Lucian Maticiuc

Acest material este o adaptare și completare a notelor de curs ale domnului Conf. Dr. Lucian Maticiuc.

1 Spații vectoriale

În liceu ați studiat, dintre structurile algebrice, pe acelea de grup, inel, corp. Reamintim pe scurt definițiile acestora.

Definiția 1 Fie G o mulțime nevidă, pe care se dă o lege de compoziție internă, $*$: $G \times G \rightarrow G$, ce asociază oricăror elemente x, y din G elementul unic $x * y$ din G . Spunem că perechea $(G, *)$ este un grup dacă $*$ verifică următoarele axiome:

- 1) $*$ este asociativă: $(x * y) * z = x * (y * z)$, $\forall x, y, z \in G$;
- 2) $*$ admite element neutru: $\exists e \in G$ a.i. $x * e = e * x = x$, $\forall x \in G$;
- 3) Orice element x din G admite un simetric: $\forall x \in G$, $\exists x' \in G$ a.i. $x * x' = x' * x = e$.

Dacă în plus legea de compoziție $*$ este comutativă, adică $x * y = y * x$, $\forall x, y \in G$, spunem că $(G, *)$ este un grup comutativ (abelian).

Facem observația că elementul neutru al unui grup este unic. De asemenea, dacă legea de compoziție este una aditivă, $+$, elementul neutru se notează cu 0 , simetricul lui x se notează $-x$ și se numește opusul lui x . Dacă legea de compoziție este una multiplicativă, \cdot , elementul neutru se notează cu 1 , simetricul lui x se notează x^{-1} și se numește inversul lui x .

De exemplu, următoarele mulțimi au structură de grup în raport cu legea de compoziție specificată.

$(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, (\mathbb{Q}^*, \cdot) , (\mathbb{R}^*, \cdot) , (\mathbb{C}^*, \cdot) grupurile numerice, toate comutative;
 $(\mathcal{M}_{m,n}(G), +)$, grupul comutativ aditiv al matricelor cu coeficienți într-un grup comutativ $(G, +)$, $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$, $(GL_n(\mathbb{C}), \cdot)$, grupul liniar general real, respectiv complex, de ordinul n , unde $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$, $GL_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \det A \neq 0\}$, ambele necomutative.

$(\mathbb{R}[X], +)$, $(\mathbb{C}[X], +)$, grupurile comutative ale polinoamelor în nedeterminata X , cu coeficienți reali, respectiv complecși.

$(\mathbb{R}^M, +)$, $(\mathbb{C}^M, +)$, unde $\mathbb{R}^M = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid f - \text{funcție}\}$, $\mathbb{C}^M = \{f : M \rightarrow \mathbb{C} \mid f - \text{funcție}\}$, cu M o submulțime de numere reale, respectiv complexe.

Amintim că suma a două funcții $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ este funcția notată $f + g : M \rightarrow \mathbb{R}$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in M$. Ea este o lege de compoziție comutativă.

$(\mathbb{Z}_n, +)$ grupul comutativ al claselor de resturi modulo n .

O structură algebrică mai complexă este cea de inel unitar.

Definiția 2 Fie A o mulțime nevidă, pe care se dau două legi de compoziție interne, $+$: $A \times A \rightarrow A$, \cdot : $A \times A \rightarrow A$. Spunem că tripletul $(A, +, \cdot)$ este un inel unitar dacă cele două legi de compoziție verifică următoarele axiome:

- 1) $(A, +)$ este grup comutativ;
 - 2) " \cdot " este asociativă: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \forall x, y, z \in A$;
 - 3) " \cdot " admite element neutru: $\exists 1 \in A$ a.i. $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x, \forall x \in A$;
 - 4) " \cdot " este distributivă față de " $+$ " : $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z, \forall x, y, z \in A$.
- Dacă " \cdot " este comutativă, spunem că inelul este comutativ.

Exemple de inele

- $(\mathbb{Z}, +, \cdot), (\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot), (\mathbb{C}, +, \cdot)$ (comutative);
 - $(\mathcal{M}_n(A), +, \cdot)$, inelul matricelor pătrate, cu elemente în inelul comutativ A , cu adunarea și înmulțirea matricelor (necomutativ);
 - $(A[X], +, \cdot)$, inelul polinoamelor cu coeficienți în inelul comutativ A , cu operațiile de adunare și de înmulțire a polinoamelor (comutativ);
 - $(\mathbb{R}^M, +, \cdot), (\mathbb{C}^M, +, \cdot)$, cu operațiile de adunare a funcțiilor și înmulțire a funcțiilor, (comutative);
- Amintim că produsul a două funcții $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ este funcția notată $f \cdot g : M \rightarrow \mathbb{R}, (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \forall x \in M$.
- $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ inelul claselor de resturi modulo n , cu adunarea și înmulțirea acestora (comutativ).

Definiția 3 Fie K o mulțime nevidă, pe care se dau două legi de compoziție interne, $+$: $K \times K \rightarrow K$, \cdot : $K \times K \rightarrow K$. Spunem că tripletul $(K, +, \cdot)$ este un corp dacă cele două legi de compoziție verifică următoarele axiome:

- 1) $(K, +)$ este grup comutativ;
 - 2) $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ este grup;
 - 3) " \cdot " este distributivă față de " $+$ ".
- Dacă " \cdot " este comutativă, numim corpul comutativ sau **câmp**.

Exemple de corpuri - $(\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot), (\mathbb{C}, +, \cdot), (\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$, cu n număr prim, toate comutative.

Putem introduce acum definiția unui spațiu liniar.

Fie K un corp comutativ (câmp) ale cărui elemente le vom numi **scalari** și le vom nota cu litere grecești $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$, având elementul nul notat cu 0 și elementul unitate (neutru) cu 1 . Fie V o mulțime ale cărei elemente le vom numi **vectori** și le vom nota cu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{u}, \vec{v}, \dots$ (vectorii se mai pot nota și cu $\bar{a}, \bar{b}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v}, \dots$).

Definiția 4 Vom spune că V este un **spațiu vectorial** (spațiu liniar) peste câmpul K (sau K - spațiu vectorial) dacă pe mulțimea V sunt definite două legi de compoziție, una internă "+", numită **adunarea vectorilor**,

$$+ : V \times V \rightarrow V, \forall \vec{x}, \vec{y} \in V, \vec{x} + \vec{y} \in V,$$

și una externă " \cdot ", numită **înmulțirea vectorilor cu scalari**,

$$\cdot : K \times V \rightarrow V, \forall \alpha \in K, \forall \vec{x} \in V, \alpha \cdot \vec{x} \in V$$

astfel încât:

1. Adunarea vectorilor este **asociativă**

$$\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} \in V, \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V,$$

2. Adunarea vectorilor este **comutativă**

$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}, \forall \vec{x}, \vec{y} \in V,$$

3. Există un vector notat $\vec{0} \in V$, numit **vector nul**, astfel încât

$$\vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}, \forall \vec{x} \in V,$$

4. Pentru orice $\vec{x} \in V$ există vectorul $-\vec{x} \in V$, numit **opusul** lui \vec{x} , astfel încât

$$\vec{x} + (-\vec{x}) = (-\vec{x}) + \vec{x} = \vec{0},$$

5.

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{x}) = (\alpha\beta) \cdot \vec{x}, \forall \alpha, \beta \in K, \forall \vec{x} \in V,$$

6.

$$(\alpha + \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{x}, \forall \alpha, \beta \in K, \forall \vec{x} \in V,$$

7.

$$\alpha \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \alpha \cdot \vec{x} + \alpha \cdot \vec{y}, \forall \alpha \in K, \forall \vec{x}, \vec{y} \in V,$$

8.

$$1 \cdot \vec{x} = \vec{x}, \forall \vec{x} \in V,$$

unde 1 este elementul neutru pentru operația de înmulțire în corpul K .

Remarca 5 Din definiția de mai sus se observă că V are structură de grup comutativ în raport cu operația “+” de adunare a vectorilor.

Remarca 6 În cele ce urmează corpul K va desemna câmpul numerelor reale \mathbb{R} sau câmpul numerelor complexe \mathbb{C} (înzestrate cu operațiile uzuale de adunare și înmulțire a numerelor).

Propoziția 7 În orice spațiu liniar au loc următoarele reguli de calcul.

$$1. \quad 0 \cdot \vec{x} = \vec{0}, \forall \vec{x} \in V$$

$$2. \quad \alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}, \forall \alpha \in K$$

$$3. \quad (-\alpha) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot (-\vec{x}) = -(\alpha \cdot \vec{x}), \forall \alpha \in K, \forall \vec{x} \in V$$

$$4. \quad (-\alpha) \cdot (-\vec{x}) = \alpha \cdot \vec{x}, \forall \alpha \in K, \forall \vec{x} \in V$$

Demonstra. Folosind axiomele din definiția spațiului vectorial deducem

$$\vec{x} + 0 \cdot \vec{x} = 1 \cdot \vec{x} + 0 \cdot \vec{x} = (1 + 0) \cdot \vec{x} = 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}.$$

Pe de altă parte $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$ deci, din unicitatea elementului neutru, obținem

$$0 \cdot \vec{x} = \vec{0}.$$

De asemenea

$$\alpha \cdot \vec{0} + \alpha \cdot \vec{x} = \alpha \cdot (\vec{0} + \vec{x}) = \alpha \cdot \vec{x},$$

deci, din unicitatea elementului neutru, obținem

$$\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}.$$

Demonstrăm a treia afirmație:

$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{x} = (\alpha + (-\alpha)) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{x} + (-\alpha) \cdot \vec{x} \Leftrightarrow (-\alpha) \cdot \vec{x} = -\alpha \cdot \vec{x}.$$

■

Exemplul 8 Orice corp comutativ K , împreună cu adunarea și înmulțirea din K , formează un spațiu vectorial peste K . Observăm că privim înmulțirea pe K ca o lege de compoziție externă, K jucând atât rolul unui corp comutativ cât și al lui V din definiția unui spațiu liniar.

Deci $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sunt spații vectoriale peste \mathbb{R} , respectiv \mathbb{C} .

Următorul exemplu este o generalizare a celui anterior.

Exemplul 9 Spațiul vectorial aritmetic K^n .

Fie K un câmp oarecare și $n \in \mathbb{N}^*$. Să considerăm spațiul K^n dat de produsul cartezian

$$K^n := \underbrace{K \times K \times \dots \times K}_{n \text{ ori}} = \{\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in K\}$$

Definim operațiile

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \forall \vec{x}, \vec{y} \in K^n$$

$$\alpha \cdot \vec{x} = \alpha (x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n), \forall \alpha \in K, \forall \vec{x} \in K^n$$

Observăm că elementul neutru la $+$ este $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$, iar opusul lui \vec{x} este

$$-\vec{x} = (-x_1, \dots, -x_n).$$

Verificați că, în raport cu aceste două operații, K^n este spațiu vectorial peste câmpul K .

Exemplul 10 Spațiul vectorial $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ al matricelor cu elemente din K cu m linii și n coloane.

Vom nota cu a_{ij} elementul matricei $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ situat pe linia i și coloana j . Deci A se scrie sub forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

sau prescurtat $A = (a_{ij})_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}}$.

Definim operațiile

$$A + B = (a_{ij})_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}} + (b_{ij})_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}} = (a_{ij} + b_{ij})_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}}, \forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$$

$$\alpha \cdot A = \alpha \cdot (a_{ij})_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}} = (\alpha a_{ij})_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}}, \forall \alpha \in K, \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$$

Verificați că, în raport cu aceste două operații, $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ este spațiu vectorial peste câmpul K .

Pentru $m = n$ obținem $\mathcal{M}_n(K)$, numit **spațiul vectorial al matricelor pătrate de ordin n** .

Exemplul 11 Mulțimile $K[X], K_n[X]$ a **polinoamelor cu coeficienți într-un corp comutativ K , respectiv a polinoamelor de grad cel mult n** (unde $n \in \mathbb{N}^*$ este arbitrar fixat), au structuri de spații vectoriale peste K , în raport cu operațiile de adunare a polinoamelor și de înmulțire a acestora cu scalari din K . În particular, $\mathbb{C}_n[X], \mathbb{C}[X]$ sunt \mathbb{C} -spații liniare și $\mathbb{R}[X], \mathbb{R}_n[X]$ sunt \mathbb{R} -spații liniare.

Exemplul 12 Fie M o mulțime oarecare și K un corp comutativ. Fie $K^M = \{f : M \rightarrow K \mid f \text{ funcție}\}$.

Amintim că dacă $f, g \in K^M$, spunem că $f = g$ dacă $f(x) = g(x), \forall x \in M$.

Definim adunarea funcțiilor prin $f + g : M \rightarrow K, (f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in M$ și înmulțirea scalarilor din K cu funcții prin $\alpha \cdot f : M \rightarrow K, (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x), \forall x \in M$.

Atunci K^M , înzestrată cu aceste două legi de compoziți, este un K -spațiu liniar.

Remarca 13 În continuare vom renunța, pentru simplitatea scrierii, la notația “ \cdot ”; astfel $\alpha \cdot \vec{x}$ se va scrie, mai simplu, $\alpha \vec{x}$ (dacă nu există posibilitate de confuzie).

1.1 Exerciții

1. Fie G un grup aditiv comutativ și K un câmp. Are G structură de spațiu vectorial față de înmulțirea cu scalari definită prin $\alpha x = x, \forall \alpha \in K, \forall x \in G$? Dar dacă este definită prin $\alpha x = 0, \forall \alpha \in K, \forall x \in G$?

2. Se notează cu \mathbb{R}^D mulțimea funcțiilor reale definite pe $D \subset \mathbb{R}$. Pentru orice $f, g \in \mathbb{R}^D$ se definesc operațiile

$$f \oplus g = fg \quad \text{și} \quad \alpha \odot f = f^\alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Este \mathbb{R}^D un spațiu vectorial?

3. Să se arate că mulțimea $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, împreună cu operațiile definite de

$$x \oplus y = xy \quad \text{și} \quad \alpha \odot x = x^\alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x, y \in V,$$

este un spațiu vectorial peste \mathbb{R} .

Rezolvare:

Se observă imediat că operațiile sunt cu valori în V , adică pentru orice $x, y \in V$ și $\alpha \in \mathbb{R}$ avem că $x \oplus y \in V$ și că $\alpha \odot x \in V$. De asemenea este ușor de verificat că (V, \oplus) este un grup comutativ (e subgrup al lui (\mathbb{R}^*, \cdot)).

Să verificăm și celelalte proprietăți

$$\begin{aligned} \alpha \odot (\beta \odot x) &= \alpha \odot (x^\beta) = (x^\beta)^\alpha = x^{\alpha\beta} = (\alpha\beta) \odot x, \\ (\alpha + \beta) \odot x &= x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta = \alpha \odot x \oplus \beta \odot x, \\ \alpha \odot (x \oplus y) &= \alpha \odot (xy) = (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha = \alpha \odot x \oplus \alpha \odot y, \\ 1 \odot x &= x^1 = x, \end{aligned}$$

pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ și orice $x, y \in V$.

4. (Complexificatul unui spațiu vectorial real) Fie V un spațiu vectorial real. Pe $V \times V$ definim

$$(\vec{u}_1, \vec{u}_2) + (\vec{v}_1, \vec{v}_2) = (\vec{u}_1 + \vec{v}_1, \vec{u}_2 + \vec{v}_2),$$

$$(\alpha + i\beta)(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = (\alpha\vec{u}_1 - \beta\vec{u}_2, \beta\vec{u}_1 + \alpha\vec{u}_2).$$

Verificați că $V \times V$, împreună cu cele două legi de compoziție anterioare, are structură de spațiu vectorial complex.